

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Barbka Podbregar  
**Raabejev test in drugi kvocientni test**

Mentor: prof. dr. Milan Hladnik

Ljubljana, 2011

## UVOD

Pri študiju vrst nas najbolj zanima ali le-ta konvergira (se jo da sešteti), ali divergira (se je ne da sešteti). Za konvergenco vrste poznamo različne kriterije, npr. D'Alembertov kvocientni kriterij, Cauchyjev korenski kriterij, Raabejev kriterij, Cauchyjev integralni kriterij in druge [1]. Našteti kriteriji se uporabljajo pri študiju konvergence vrst s *pozitivnimi členi*, na katere se bomo omejili v tej nalogi.

Vendar pa našti testi ne povedo vedno, ali naša vrsta konvergira. To nas bo skozi celotno nalogo motiviralo za vpeljavo izpopolnjenega Raabejevega kriterija in drugega kvocientnega kriterija.

## PONOVI TEV

Za razumevanje naloge bomo potrebovali nekaj izrekov, ki jih poznamo že od prej.

**Izrek 1** (Primerjalni kriterij). *Naj velja  $0 \leq a_n \leq b_n, n = 1, 2, 3, \dots$*

- (1) Če  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergira.
- (2) Če  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergira  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.

*Dokaz.* Naj bodo  $S_n$  delne vsote vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  in  $S'_n$  delne vsote  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .  
 $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \leq S'_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$ , ker  $a_0 \leq b_0, a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$ .

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergira  $\Leftrightarrow S'_n$  navzgor omejena  $\Rightarrow S_n$  navzgor omejena  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira  $\Leftrightarrow S_n$  navzgor neomejena  $\Rightarrow S'_n$  navzgor neomejena  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergira.

□

Pri dokazovanju izpopolnjenega Raabejevega testa bomo potrebovali še kvocientni primerjalni test, ki ga še ne poznamo, a ni tako težek za razumevanje.

**Izrek 2** (Kvocientni primerjalni test). *Naj bosta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  vrsti s pozitivnimi členi in naj velja  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$  za vse  $n$  od nekega naprej. Tedaj velja: če vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergira, potem tudi vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.*

*Dokaz.* Iz  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$  sledi

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \geq \frac{a_n}{b_n} \geq \dots \geq \frac{a_N}{b_N}, \quad \text{za vse } n \geq N, \quad \text{torej}$$

$$a_{n+1} \geq \frac{a_N}{b_N} b_{n+1}.$$

Ker je  $\frac{a_N}{b_N}$  neka konstanta (npr.  $c$ ), dobimo:

$$a_{n+1} \geq c \cdot b_{n+1}.$$

Ker  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergira, po primerjalnem testu vemo, da tudi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira. □

**Izrek 3** (Raabejev test). *Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta s pozitivnimi členi in  $R_n := n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ .*

*Tedaj velja:*

- (1) Če za vsak  $n$  od nekega  $n_0$  naprej velja  $R_n \geq r > 1$ , tedaj vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- (2) Če za vsak  $n$  od nekega  $n_0$  naprej velja  $R_n \leq 1$ , tedaj vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

**Opomba 4.** Če obstaja limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$ , potem velja:

- Če je  $R > 1$ , vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- Če je  $R < 1$ , vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.
- Če je  $R = 1$ , o konvergenci oz. divergenci vrste ne moremo soditi.

*Dokaz.* Naredimo primerjavo z vrsto  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ .

(1) Naj bo  $R_n \geq r > 1$  za  $n \geq n_0$ . Sledi

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 > \frac{r}{n}, \quad n \geq n_0,$$

oziroma

$$(*) \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n}, \quad n \geq n_0.$$

Naj bo  $1 < s < r$ . Ker je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^s - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x+1)^{s-1}}{1} = s,$$

je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^s - 1}{\frac{1}{n}} = s < r.$$

Zato za vse  $n$  od nekje naprej velja  $(1 + 1/n)^s - 1 < r \cdot 1/n, n \geq m_0 > n_0$ , to je  $(1 + 1/n)^s < 1 + r/n, n \geq m_0 > n_0$ . Zaradi (\*) je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^s}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^s}.$$

Torej

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^s}{\left(\frac{1}{n}\right)^s},$$

za vsak  $n \geq m_0 > n_0$ . Zmnožimo

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \dots \frac{a_m}{a_{m-1}} < \frac{\left(\frac{1}{n_0+1}\right)^s}{\left(\frac{1}{n_0}\right)^s} \frac{\left(\frac{1}{n_0+2}\right)^s}{\left(\frac{1}{n_0+1}\right)^s} \dots \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^s}{\left(\frac{1}{m-1}\right)^s}$$

in dobimo

$$\frac{a_m}{a_{n_0}} < \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^s}{\left(\frac{1}{n_0}\right)^s}, \quad m \geq n_0,$$

$$a_m < \frac{a_{n_0}}{\left(\frac{1}{n_0}\right)^s} \left(\frac{1}{m}\right)^s, \quad m \geq n_0.$$

Torej je vrsta iz členov, ki je konvergentna (saj  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/m)^s$  konvergira, ker je  $s > 1$ ), majoranta za vrsto  $a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots$ . Ker majoranta konvergira, naša vrsta konvergira.

(2) Naj bo  $R_n \leq 1$  za vse  $n \geq n_0$ . Torej

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad n \geq n_0,$$

oziroma

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}, \quad n \geq n_0,$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{\frac{n+1}{n}}.$$

Ker  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergira, po kvocientnem primerjalnem testu divergira tudi vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . □

Spomnimo se še na D'Alembertov kvocientni kriterij za konvergenco vrst s pozitivnimi členi, ki ga bomo potrebovali pri vpeljavi drugega kvocientnega testa.

**Izrek 5** (D'Alembertov kvocientni kriterij). *Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta s pozitivnimi členi. Tvorimo zaporedje  $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Velja:*

- (1) Če obstaja  $q < 1$  tak, da za vsak  $n \geq n_0$  velja  $D_n \leq q$ , sledi da vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- (2) Če za vsak  $n \geq n_0$  velja  $D_n \geq 1$ , sledi da vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

Če obstaja limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = D$ , velja:

- Če je  $D < 1$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- Če je  $D > 1$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.
- Če je  $D = 1$ , o konvergenci oz. divergenci vrste ne moremo govoriti.

*Dokaz.* (1) Naj bo  $D_n \leq q < 1$  ( $n \geq n_0$ ). Torej sledi  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$  ( $n \geq n_0$ ), oziroma  $a_{n+1} \leq qa_n$  ( $n \geq n_0$ ), zato je za vsak  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &\leq a_{n_0}q, \\ a_{n_0+2} &\leq a_{n_0+1}q \leq a_{n_0}q^2, \\ a_{n_0+3} &\leq a_{n_0+2}q \leq a_{n_0}q^3, \\ &\dots \\ a_{n_0+m} &\leq a_{n_0}q^m. \end{aligned}$$

Sledi, da je vrsta  $a_{n_0} + a_{n_0}q + a_{n_0}q^2 + \dots$  majoranta za vrsto  $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots$ . Ker je  $0 < q < 1$  vrsta  $1 + q + q^2 + \dots$  konvergira, zato tudi vrsta  $a_{n_0} + a_{n_0}q + a_{n_0}q^2 + \dots$  konvergira. Ta vrsta pa je majoranta za  $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots$ , torej po primerjalnem kriteriju konvergira tudi slednja. Zato tudi vrsta  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  konvergira.

- (2) Če je  $D_n \geq 1$ ,  $n \geq n_0$ , je  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  za  $n \geq n_0$ . Torej je  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  naraščajoče zaporedje pozitivnih števil,  $a_n$  tako ne konvergira k 0, ko gre  $n$  proti neskončno, zato vrsta divergira. □

Poglejmo si primer, ko Raabejev test zataji.

**Primer 6.** Razišči konvergenco vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!n!4^n}{(2n)!\sqrt{n}}$ .

Najprej izračunamo

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2}.$$

Zaradi  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{-1}{8n^2} + \frac{1}{16n^3} + \dots$  je

$$R_n = n \left( \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \dots\right) - 1 \right) = 1 + \frac{1}{8n} + \dots \text{ in zato}$$

$$R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1^+.$$

Po Raabejevem testu vidimo, da o konvergenci oz. divergenci vrste ne moremo govoriti.

Zanimivo je opazovati konvergenco iste vrste, ki ji odstranimo prvi člen. To ne bo vplivalo na konvergenco, saj bo vsota še vedno končna (oz. neskončna), če ji odstranimo en člen (oz. končno mnogo členov).

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)!n!4^n}{(2n)!\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!4^{n+1}}{(2n+2)!\sqrt{n+1}}.$$

Izračunamo

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{7}{8n^2} + \dots$$

Dobimo

$$R_n = 1 - \frac{7}{8n} + \dots \text{ in zato}$$

$$R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1^-.$$

Po Raabejevem testu vidimo, da vrsta divergira.

To lahko razložimo z vpeljavo novega testa.

**Izrek 7** (Izpopolnjen Raabejev test). Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta s pozitivnimi členi in

$$R_n^{(k)} := (n-k) \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$$

Če je  $R_n^{(k)} \leq 1$  za nek nenegativen  $k$  in vse dovolj velike  $n$ , vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

Dokaz. Iz  $R_n^{(k)} \leq 1$  sledi

$$(n-k) \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \text{ torej}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{1+n-k} \geq \frac{1}{n-k}$$

za vse dovolj velike  $n$ . Ker  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-k}$  divergira (primerjalni test:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-k} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , slednja je splošno znana divergentna vrsta), po kvocientnem primerjalnem testu vemo, da tudi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.  $\square$

Poglejmo si novi test na prejšnjem primeru.

**Primer 8.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!n4^n}{(2n)!\sqrt{n}}$ .  
 Najprej izračunamo

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{8n^2} + \dots$$

Dobimo

$$R_n^{(1)} = (n-1) \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{8n^2} + \dots \right) = 1 - \frac{7}{8n} + \dots, \text{ torej}$$

$$R_n^{(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1^-.$$

Po izboljššanem Raabejevem testu vidimo, da naša vrsta divergira.

Izboljšan Raabejev test je močnejši kot divergenčni del Raabejevega testa. Za  $k = 0$  namreč dobimo  $R_n^{(0)} = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ , torej ravno Raabejev test.

Označimo  $c_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ . Ker je  $a_n$  pozitivno zaporedje, je tudi  $c_n$  pozitivno zaporedje. Vstavljanje  $k$ -ja v zaporedje  $R_n$  ne vpliva na konvergenčni del Raabejevega testa, saj imata zaporedji  $R_n = n(c_n - 1)$  in  $R_n^{(k)} = (n-k)(c_n - 1)$  ista stekališča v  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ .

**Trditev 9.** Zaporedje  $R_n$  konvergira k nekemu številu natanko takrat, ko zaporedje  $R_n^k$  konvergira k istemu številu.

*Dokaz.* Dokazujemo v obe smeri: ( $k$  je fiksno število)

( $\Rightarrow$ ) Naj velja  $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r$ . Potem iz enakosti  $\frac{R_n}{n} = c_n - 1$ , pri  $n \rightarrow \infty$  sledi: leva stran enakosti konvergira proti 0, torej mora tudi desna stran konvergirati proti 0. Iz  $R_n^k = n(c_n - 1) - k(c_n - 1) = R_n - k(c_n - 1)$ , pri  $n \rightarrow \infty$  dobimo: desna stran enakosti konvergira k  $r$ , torej mora k istemu številu konvergirati tudi leva stran enačbe.

( $\Leftarrow$ ) Naj velja  $R_n^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r$ . Potem iz enakosti  $\frac{R_n^k}{n-k} = c_n - 1$ , pri  $n \rightarrow \infty$  sledi: leva stran enakosti konvergira proti 0, torej mora tudi desna stran konvergirati proti 0. Iz  $R_n = R_n^k + k(c_n - 1)$ , pri  $n \rightarrow \infty$  dobimo: desna stran enakosti konvergira proti  $r$ , torej mora tudi k istemu številu konvergirati tudi leva stran enačbe.  $\square$

Večji kot je  $k$ , bolj je test natančen, saj  $R_n^{(k)} \geq R_n^{(k+1)}$ .

Kaj pa praktičnost izboljššanega Raabejevega testa? V prejšnjem primeru je bilo dovolj že, da smo izračunali  $R_n^{(1)}$ . Kaj pa v poljubnem primeru? Koliko računanja bo potrebna, preden bomo našli pravi  $k$ ? Skoraj nujno je vpeljati preprosto posledico, ki nam bo zelo olajšala delo.

**Posledica 10.** Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta s pozitivnimi členi, za katero velja

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Potem  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

*Dokaz.* Iz enakosti sledi:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq \frac{1}{n} + \frac{M}{n^2}$$

za neko pozitivno število  $M$  in vse dovolj velike  $n$ .

$$R_n^{(M+1)} \leq (n - M - 1) \left( \frac{1}{n} + \frac{M}{n^2} \right) = 1 - \frac{1}{n} + \dots,$$

torej  $R_n^{(M+1)} \leq 1$  za vse dovolj velike  $n$ . Po izboljššanem Raabejevem testu torej vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.  $\square$

## DRUGI KVOCIENTNI TEST

D'Alembertov kvocientni test, ki temelji na limiti razmerja  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ , pogosto zataji v situacijah, kjer pričakujemo, da nam bo povedal, ali vrsta konvergira oz. divergira. Npr. pogosto zataji pri vrstah, ki vsebujejo fakultete in končne produkte. Želimo vpeljati strožji test, ki bo poskrbel tudi za takšne primere.

**Izrek 11** (Drugi kvocientni test). *Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta s pozitivnimi členi. Definirajmo*

$$L = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right\}$$

in

$$l = \min \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right\}.$$

Tedaj velja:

- (1) Če  $L < \frac{1}{2}$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- (2) Če  $l > \frac{1}{2}$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.
- (3) Če  $l \leq \frac{1}{2} \leq L$ , o konvergenci oz. divergenci vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ne moremo govoriti.

*Dokaz.* (1) Naj bo  $L < \frac{1}{2}$  in  $r$  tak, da velja  $L < r < \frac{1}{2}$ . Potem obstaja tak  $N$ , da velja

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leq r \quad \text{in} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq r$$

za vse  $n \geq N$ . Oglejmo si vrsto le za velike  $n$  od tega  $N$  naprej.

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} a_n &= (a_N + a_{N+1} + \cdots + a_{2N-1}) + (a_{2N} + a_{2N+1} + \cdots + a_{4N-1}) + \\ &\quad + (a_{4N} + a_{4N+1} + \cdots + a_{8N-1}) + \cdots + \\ &\quad + (a_{2^k N} + a_{2^k N+1} + \cdots + a_{2^{k+1} N-1}) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_{2^k N} + a_{2^k N+1} + \cdots + a_{2^{k+1} N-1}). \end{aligned}$$

Naj bo  $S_k = a_{2^k N} + a_{2^k N+1} + \cdots + a_{2^{k+1} N-1}$  za  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Ker velja  $a_{2n} \leq r \cdot a_n$  in  $a_{2n+1} \leq r \cdot a_n$ , imamo za vsak  $k$

$$\begin{aligned} S_k &= (a_{2^k N} + a_{2^k N+1}) + (a_{2^k N+2} + a_{2^k N+3}) + \cdots + (a_{2^{k+1} N-2} + a_{2^{k+1} N-1}) \\ &\leq 2r(a_{2^{k-1} N}) + 2r(a_{2^{k-1} N+1}) + \cdots + 2r(a_{2^k N-1}) \\ &= 2r(a_{2^{k-1} N} + a_{2^{k-1} N+1} + \cdots + a_{2^k N-1}) = 2rS_{k-1}. \end{aligned}$$

Z indukcijo na  $k$  dobimo  $S_k \leq 2^k r^k S_0$  za  $k \geq 1$ . Torej

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} S_0 (2r)^k = S_0 \sum_{k=0}^{\infty} (2r)^k < \infty,$$

saj je  $r < \frac{1}{2}$ . Zaključimo, da  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira, če je  $L < \frac{1}{2}$ .

(2) Naj bo  $l > \frac{1}{2}$  in  $r$  tak, da velja  $\frac{1}{2} < r < l$ . Potem obstaja tak  $N$ , da velja

$$\frac{a_{2n}}{a_n} > r \quad \text{in} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_n} > r$$

za vse  $n \geq N$ . Oziroma  $a_{2n} > r \cdot a_n$  in  $a_{2n+1} > r \cdot a_n$  za vse  $n \geq N$ . Naj bo  $S_k$  kot zgoraj. Z indukcijo na  $k$  lahko pokažemo, da velja  $S_k \geq S_0(2r)^k$  za  $k \geq 1$ . Ker je  $r > \frac{1}{2}$ , velja

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \geq \sum_{k=0}^{\infty} (2r)^k = S_0 \sum_{k=0}^{\infty} (2r)^k = \infty.$$

Zaključimo, da  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira, če je  $l > \frac{1}{2}$ .

- (3) Oglejmo si vrsto  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , kjer je  $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}$ . Uporabimo integralni test za konvergenco s substitucijo  $\ln x = u$  ( $\frac{1}{x} dx = du$ ) in dobimo:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^p} = \begin{cases} < \infty & p > 1 \\ = \infty & p \leq 1 \end{cases}.$$

Torej vrsta konvergira pri  $p > 1$  in divergira pri  $p \leq 1$ . Če izračunamo limito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\ln n)^p}{2n(\ln 2n)^p} = \frac{1}{2}.$$

V tem primeru je ravno  $l \leq \frac{1}{2} \leq L$ , o konvergenci oz. divergenci pa ne moremo govoriti. □

V veliko primerih obstajata limiti  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$  in  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}$ . Vidimo, da potem velja:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \quad \text{in} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}.$$

V tem primeru se drugi kvocientni test malce poenostavi. Zapišimo ga v posledico.

**Posledica 12.** Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta s pozitivnimi členi in naj obstajata limiti  $L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$  in  $L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}$ . Označimo  $L = \max\{L_1, L_2\}$  in  $l = \min\{L_1, L_2\}$ .

- (1) Če  $L < \frac{1}{2}$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- (2) Če  $l > \frac{1}{2}$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.
- (3) Če  $l \leq \frac{1}{2} \leq L$ , pa o konvergenci oz. divergenci vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ne moremo govoriti.

*Dokaz.* Dokaz je analogen dokazu drugega kvocientnega testa. □

Poglejmo si nekaj primerov. Pri vseh treh primerih nam kvocientni test ne pove nič o konvergenci vrste, medtem ko je drugi kvocientni test uspešen. Z Raabejevim testom lahko preverimo, da nam je dal drugi kvocientni test res pravi rezultat. Za zgled bomo prvi primer rešili z vsemi tremi testi, drugega in tretjega pa le z novim drugim kvocientnim testom.

**Primer 13.** Naj bo  $a_n = \frac{1}{n^p}$ .

- Kvocientni test:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

O konvergenci oz. divergenci vrste ne moremo govoriti.

- Raabejev test:

$$R_n = n \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1 \right),$$

uporabimo L'Hopitalovo pravilo in dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} p \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-1} = p = \begin{cases} p > 1 & \text{konvergira} \\ p < 1 & \text{divergira} \\ p = 1 & ? \end{cases}.$$

? pomeni, da nam Raabejev test ne pove nič o konvergenci oz. divergenci vrste.

• Drugi kvocientni test:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^p},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2 + \frac{1}{n})^p} = \frac{1}{2^p}.$$

Ker velja  $\frac{1}{2^p} < \frac{1}{2}$  natanko takrat, ko je  $p > 1$  in  $\frac{1}{2^p} > \frac{1}{2}$  natanko takrat, ko je  $p < 1$ , sledi, da vrsta konvergira za  $p > 1$  in divergira za  $p < 1$ .

**Primer 14.** Naj bo  $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n (n+1)!}$ . Potem je:

$$\begin{aligned} \frac{a_{2n+1}}{a_n} &\leq \frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{(2n+1)(2n+3) \cdots (4n-1)}{2^n (n+2)(n+3) \cdots (2n)(2n+1)} \\ &= \frac{(2n+3)(2n+5) \cdots (4n-1)}{2^n (n+2)(n+3) \cdots (2n)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2n+3}{2n+4}\right) \left(\frac{2n+5}{2n+6}\right) \cdots \left(\frac{4n-1}{4n}\right) \\ &< \frac{1}{2} \left(\frac{4n-1}{4n}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Ker je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{n-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ , sledi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \leq \frac{1}{2\sqrt[4]{e}} < \frac{1}{2},$$

torej vrsta, po drugem kvocientnem kriteriju, konvergira.

**Primer 15.** Naj bo  $x > 0$  in  $a_n = \frac{(n-1)!}{(1+x)(2+x)(3+x) \cdots (n+x)}$ . Potem je:

$$\begin{aligned} \frac{a_{2n+1}}{a_n} &\leq \frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{(n)(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)}{(n+1+x)(n+2+x) \cdots (2n-1+x)(2n+x)} \\ &= \frac{n}{2n+x} \left(\frac{n+1}{n+1+x}\right) \left(\frac{n+2}{n+2+x}\right) \cdots \left(\frac{2n-1}{2n-1+x}\right) \\ &\leq \frac{n}{2n+x} \left(\frac{2n-1}{2n-1+x}\right)^{n-1} = \frac{n}{2n+x} \left(1 - \frac{x}{2n-1+x}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Ker je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+x} \left(1 - \frac{x}{2n-1+x}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} e^{-x/2},$$

sledi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \leq \frac{1}{2} e^{-x/2} < \frac{1}{2}.$$

Po drugem kvocientnem testu vidimo, da vrsta konvergira za  $x > 0$ .

Za konec si pogledjmo še splošnejšo različico drugega kvocientnega testa.

**Izrek 16** ( $m$ -ti kvocientni test). Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta s pozitivnimi členi in  $m > 1$  fiksno število. Definirajmo:

$$L_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{mn}}{a_n}, L_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{mn+1}}{a_n}, \dots, L_m = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{mn+m-1}}{a_n},$$

$$l_1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{mn}}{a_n}, l_2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{mn+1}}{a_n}, \dots, l_m = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{mn+m-1}}{a_n}.$$

Naj bo  $L = \max\{L_1, L_2, \dots, L_m\}$  in  $l = \min\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ .

- (1) Če je  $L < \frac{1}{m}$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira.
- (2) Če je  $l > \frac{1}{m}$ , potem vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.
- (3) Če je  $l \leq \frac{1}{m} \leq L$ , o konvergenci oz. divergenci vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ne moremo govoriti.

Če vstavimo  $m = 2$ , dobimo ravno drugi kvocientni test.

*Dokaz.* Dokaz je zelo podoben dokazu drugega kvocientnega testa, le da 2 zamenjamo z  $m$ .

- (1) Naj bo  $L < \frac{1}{m}$  in  $r$  tak, da velja  $L < r < \frac{1}{m}$ . Potem obstaja tak  $N$ , da velja

$$\frac{a_{mn}}{a_n} \leq r, \frac{a_{mn+1}}{a_n} \leq r, \dots, \frac{a_{mn+m-1}}{a_n} \leq r$$

za vse  $n \geq N$ . Oglejmo si vrsto le za velike  $n$  od tega  $N$  naprej.

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} a_n &= (a_N + a_{N+1} + \dots + a_{mN-1}) + (a_{mN} + a_{mN+1} + \dots + a_{m^2N-1}) + \\ &\quad + (a_{m^2N} + a_{m^2N+1} + \dots + a_{m^3N-1}) + \dots + \\ &\quad + (a_{m^kN} + a_{m^kN+1} + \dots + a_{m^{k+1}N-1}) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_{m^kN} + a_{m^kN+1} + \dots + a_{m^{k+1}N-1}). \end{aligned}$$

Naj bo  $S_k = a_{m^kN} + a_{m^kN+1} + \dots + a_{m^{k+1}N-1}$  za  $k = 0, 1, 2, \dots$ . V  $S_k$  vzamemo skupaj po  $m$  členov in dobimo:  $S_k \leq mrS_{k-1} \leq m^k r^k S_0$  (to formulo lahko, podobno kot prej dokažemo z indukcijo).

Torej je

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} S_0 (mr)^k = S_0 \sum_{k=0}^{\infty} (mr)^k < \infty,$$

saj velja  $r < \frac{1}{m}$ . Zaključimo, da  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira če je  $L < \frac{1}{m}$ .

- (2) Naj bo  $l > \frac{1}{m}$  in  $r$  tak, da velja  $\frac{1}{m} < r < l$ . Potem obstaja tak  $N$ , da velja

$$\frac{a_{mn}}{a_n} > r, \frac{a_{mn+1}}{a_n} > r, \dots, \frac{a_{mn+m-1}}{a_n} > r$$

za vse  $n \geq N$ . Naj bo  $S_k$  kot zgoraj. Z indukcijo na  $k$  lahko pokažemo, da velja  $S_k \geq S_0 (mr)^k$  za  $k \geq 1$ . Ker je  $r > \frac{1}{m}$ , dobimo

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \geq \sum_{k=0}^{\infty} (mr)^k = S_0 \sum_{k=0}^{\infty} (mr)^k = \infty.$$

Zaključimo, da  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira, če je  $l > \frac{1}{m}$ .

(3) Oglejmo si vrsto  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , kjer je  $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}$ . Vemo, da vrsta konvergira pri  $p > 1$  in divergira pri  $p \leq 1$ . Vendar je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{mn}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\ln n)^p}{mn(\ln mn)^p} = \frac{1}{m}.$$

V tem primeru je ravno  $l \leq \frac{1}{m} \leq L$ , o konvergenci oz. divergenci pa ne moremo govoriti.

□

## LITERATURA

- [1] J. Globevnik, M. Brojan, *Analiza1*, DMFA-založništvo, Ljubljana 2008.
- [2] F. Prus-Wisniowski, *A refinement of Raabe's test*, The American Mathematical Monthly **115** (2008) 249-252.
- [3] A. Ali Sayel, *The  $m$ th Ratio Test: New Convergence Tests for Series*, The American Mathematical Monthly **115** (2008) 514-524.